Devoir maison n$^{\mathrm{o}}$ 3 : Correction

Exercice 1 (d'après CCP 2020)**.**
Partie A - Convergence d'intégrales

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t^n\,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi $\boxed{t^n\,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
D'après la question précédente, $t^n\,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de référence convergente en $+\infty$ (car $\alpha = 2 > 1$). Ainsi par comparaison entre fonctions positives on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

3. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $\left|\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.
Or d'après la question précédente (cas $n = 0$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

4. À l'aide d'un changement de variable et de la question 2, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans l'intégrale de la question 2 dont **on a montré la convergence**, on pose $t = -s$ qui est une bijection décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\infty\,;0]$ dans $[0\,;+\infty[$. On a ainsi

$$\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{-\infty} (-s)^n\,\mathrm{e}^{-(-s)^2}(-\,\mathrm{d}s) = (-1)^n \int_{-\infty}^0 s^n\,\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

et en particulier cette dernière intégrale est donc convergente.

5. Déduire des résultats précédents que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $]-\infty\,;+\infty[$. On doit donc étudier les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Or on a démontré aux questions 2 et 4 qu'elles convergeaient toutes les deux d'où $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2} \text{ est convergente}}$.

Partie B - Calcul et résultats asymptotiques

Pour la suite, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ et on admet que $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

6. En utilisant la question 4, justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles,

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{0} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

Or, en posant $n = 2p+1$ dans le résultat de la question 4, puisque $(-1)^{2p+1} = -1$, on a

$$\int_{0}^{+\infty} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} t^{2p+1} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

Ainsi $\boxed{I_{2p+1} = 0}$.

Remarque : plus généralement, si une fonction f est impaire, sous réserve de convergence, on a $\int_{-a}^{a} f(t) \,\mathrm{d}t = 0$ pour tout a réel ou infini.

7. Établir à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_{2(k+1)} = \dfrac{2k+1}{2} I_{2k}$.

Indication : on écrira $t^{2k+2} \,\mathrm{e}^{-t^2} = t^{2k+1} \times t \,\mathrm{e}^{-t^2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On prend X et Y deux réels tels que $X < Y$. On pose $u = t^{2k+1}$ et $v' = t\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Ainsi $u' = (2k+1)t^{2k}$ et $v = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[X\,;Y]$, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_X^Y t^{2k+2} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-1}{2} t^{2k+1} \,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_X^Y + \frac{2k+1}{2} \int_X^Y t^{2k} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{2} Y^{2k+1} \,\mathrm{e}^{-Y^2} + \frac{1}{2} X^{2k+1} \,\mathrm{e}^{-X^2} + \frac{2k+1}{2} \int_X^Y t^{2k} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme par croissances comparées $\displaystyle\lim_{Y \to +\infty} Y^{2k+1} \,\mathrm{e}^{-Y^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} X^{2k+1} \,\mathrm{e}^{-X^2} = 0$, en passant à la limite dans l'égalité précédente lorsque $X \to -\infty$ et $Y \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k+2} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = 0 + 0 + \frac{2k+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\boxed{I_{2k+2} = I_{2(k+1)} = \dfrac{2k+1}{2} I_{2k}}$.

8. Écrire en Python une fonction `valeur_int` qui prend en argument un entier p et qui renvoie la valeur de I_{2p}.

On utilise la valeur admise $I_0 = \sqrt{\pi}$ et la relation précédente pour calculer I_{2p} de proche en proche :

```python
from math import sqrt , pi

def valeur_int(p):
    """ Renvoie la valeur de I_{2p} """
    I = sqrt(pi)     # Valeur de I_0
    for k in range(p):
        I = I * (2*k + 1)/2     # Relation de Q7
    return I
```

On peut aussi donner une version récursive (mêmes importations de module) :

```python
def val(p):
    if p == 0:
        return sqrt(pi)
    else:
        return val(p-1) * (2*(p-1) + 1)/2  # cf Q7 pour k=p-1
```

9. Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

Proposition à démontrer : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p)$: « $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$ ».

Initialisation : D'une part $I_0 = \sqrt{\pi}$ (cf énoncé) et d'autre part $\dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}0!}\sqrt{\pi} = \dfrac{1}{1\times 1} = \sqrt{\pi}$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. On a

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &\overset{Q7}{=} \frac{2p+1}{2} I_{2p} && \mathcal{P}(p) \\
&= \frac{2p+1}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} && \times\frac{2p+2}{2p+2} \textit{ pour faire apparaître le } (2p+2)! \textit{ désiré au numérateur.} \\
&= \frac{2p+2}{2(p+1)} \times \frac{2p+1}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}}$.

10. Dans le DM2, on a montré que $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n \,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).
En utilisant ce résultat et la question précédente, montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p} = +\infty$.

D'après la formule de Stirling pour $n = 2p$, on a $(2p)! \underset{+\infty}{\sim} (2p)^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}\sqrt{2\pi\times 2p}$. Ainsi, d'après la question précédente

$$I_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2p}p^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}\sqrt{2\pi}\sqrt{2p}}{2^{2p}p^p\,\mathrm{e}^{-p}\sqrt{2\pi p}}\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} p^{2p-p}\,\mathrm{e}^{-2p+p}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} p^p\,\mathrm{e}^{-p}\sqrt{2\pi}.$$

Or par croissances comparées $\lim\limits_{p\to+\infty} p^p\,\mathrm{e}^{-p} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p} = +\infty}$.

11. Écrire en Python une fonction `seuil` qui prend en argument un flottant `borne` et qui renvoie le plus petit entier p tel que $I_{2p} \geqslant$ `borne`. On utilisera la fonction `valeur_int` de la question 8 pour calculer les valeurs de I_{2p}.

On procède de façon classique avec un `while`.

```python
def seuil(borne: float) -> int:
    p = 0
    while valeur_int(p) < borne:
        p = p + 1
    return p
```

Partie C (facultative) - Une équation différentielle

D'après la question 3, on peut définir sur $\mathbb{R}$ une fonction $S\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On admet que la fonction S est dérivable et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{2}y = \dfrac{1}{2}$.

12. ★ Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $S(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

Notons (E) l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{2}y = \dfrac{1}{2}$ et résolvons-la.

- Tout d'abord l'équation homogène (H) associée est $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.

Comme $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{x}{2}$, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Cherchons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $y_P\colon x \mapsto z(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ avec z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (méthode de la variation de la constante).

La fonction y_P est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, ${y_P}'(x) = z'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2}z(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$. En injectant dans (E), on a y_P solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ {y_P}'(x) + \frac{x}{2}y_P(x) = \frac{1}{2} \iff z'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \iff z'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}. $$

Ainsi on peut choisir $z(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ (c'est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}$ qui s'annule en 0). (*Attention, on ne sait pas calculer explicitement cette intégrale.*)

- On a ainsi obtenu que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$ x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \times \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}. $$

- Comme d'après l'énoncé, S est solution de (E), il existe un réel λ tel que S est de la forme précédente, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

En évaluant en $x = 0$, on a d'une part $S(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(0)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$ et d'autre part $\lambda\,\mathrm{e}^0 + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^0 \displaystyle\int_0^0 \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = \lambda + 0$, d'où $\lambda = 0$. (Cela revient à dire que S est l'unique solution du problème de Cauchy constitué de (E) et de la condition initiale $y(0) = 0$).

- Finalement, on a obtenu $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t}$.

Remarque : si vous voulez savoir comment on obtient l'équation différentielle vérifiée par S, allez voir la dernière partie du CCINP 2020.